METODOLOGIA BAYESIANA PARA A ACTUALIZAÇÃO DO MÓDULO DE DEFORMABILIDADE NUMA ESTRUTURA SUBTERRÂNEA

BAYESIAN METHODOLOGY FOR THE DEFORMABILITY MODULUS UPDATING IN AN UNDERGROUND STRUCUTRE

Miranda, Tiago, *Universidade do Minho, Guimarães, Portugal, tmiranda@civil.uminho.pt*
Ribeiro e Sousa, Luís, *Universidade do Porto, Porto, Portugal, ribeiro.e.sousa@gmail.com*
Gomes Correia, António, *Universidade do Minho, Guimarães, Portugal, agc@civil.uminho.pt*

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma metodologia Bayesiana genérica para a actualização de parâmetros geomecânicos. Esta metodologia é aplicada ao caso da actualização do módulo de deformabilidade numa obra subterrânea. A distribuição probabilística inicial do parâmetro foi obtida através da aplicação, a informação geomecânica, de soluções analíticas baseadas nos sistemas empíricos de classificação. Esta distribuição foi então actualizada através da metodologia desenvolvida e utilizando os resultados de um ensaio *in situ* de alta qualidade. A metodologia Bayesiana mostrou ser uma forma matematicamente válida para tratar a problemática da actualização de parâmetros geomecânicos e, principalmente, na redução da incerteza quanto ao real valor do parâmetro.

ABSTRACT

In this work a generic Bayesian framework for the updating of geomechanical parameters is presented. This framework is applied to the case of the deformability modulus updating in an underground structure. The prior distribution of the parameter was obtained through de application of analytical solutions based on the empirical classification systems. This prior distribution was then updated using the framework together with the results of a high quality *in situ* test. The Bayesian framework showed to be a mathematically valid way to deal with the problem of the geomechanical parameters updating and mostly in the uncertainty reduction related to the parameter real value.

1. INTRODUÇÃO

Na construção de obras subterrâneas diversas decisões são tomadas sob um elevado grau de incerteza e que estão relacionadas com dois problemas fundamentais, nomeadamente, as condições geológicas e geotécnicas e as questões relacionadas com a construção propriamente dita (velocidades de avanço, custos, etc.). A avaliação de parâmetros geomecânicos dos maciços interessados é um exercício de natureza consideravelmente subjectiva. A incerteza relacionada com os valores que estes parâmetros podem tomar torna difícil a definição de um conjunto de valores determinísticos para os parâmetros. Na prática, para cada zona geotécnica, uma gama de valores é atribuída a cada parâmetro baseada nos resultados da prospecção geotécnica e, no caso dos maciços rochosos, pela aplicação dos sistemas empíricos de classificação geomecânica.

Nas fases iniciais de um projecto a informação disponível relativa ao maciço rochoso é limitada. No entanto, a definição de modelos geotécnicos é um processo dinâmico e, à medida que o projecto avança, este poderá ser actualizado com nova informação entretanto coligida. Esta pode ter diferentes origens, cada uma com a sua precisão fiabilidade. Actualmente existe a necessidade da definição de uma metodologia para tratar consistentemente o problema da actualização dos parâmetros geomecânicos quando nova informação é disponibilizada no sentido de reduzir as incertezas quanto a futuras decisões.

Neste artigo é apresentada uma metodologia Bayesiana para a actualização do módulo de deformabilidade em maciços rochosos (Miranda, 2007). O seu carácter genérico permite também a sua utilização para a actualização de outros parâmetros geotécnicos. A metodologia desenvolvida foi aplicada a dados reais obtidos para a construção do complexo hidroeléctrico da Venda Nova II recentemente construído no Norte de Portugal. Mais especificamente é realizada a actualização da gama de valores para o módulo obtidos com base em informação geotécnica preliminar através da utilização de ensaios com macacos planos de grande área (LFJ).

Nesta abordagem, o módulo de deformabilidade é considerado uma variável aleatória com uma determinada distribuição probabilística. A incerteza quanto ao parâmetro é representada pelo seu desvio padrão o qual pode ser reduzido à medida que mais informação relativa ao maciço rochoso é obtida. De forma a comparar e avaliar a sensibilidade dos resultados em relação às considerações iniciais foram estudados diferentes tipos de distribuições de probabilidades.

2. MÉTODOS BAYESIANOS

2.1. Análise de dados Bayesiana e incerteza

As incertezas podem ser representadas em termos de conceitos matemáticos, baseadas na teoria das probabilidades (Ditlevsen and Madsen, 1996; Faber, 2005; Einstein, 2006). Os princípios e metodologias para análise de dados que derivam do ponto de vista de uma probabilidade subjectiva são denominados de estatística Bayesiana. O seu princípio central é a caracterização explícita de todas as formas de incerteza num determinado problema. O conhecimento acerca de um parâmetro de grandeza desconhecida é descrito através de uma distribuição de probabilidades o que significa que as probabilidades são utilizadas como a medida fundamental de incerteza.

A perspectiva Bayesiana ou subjectiva da probabilidade é diferente da probabilidade clássica já que, ao contrário desta, que assume a probabilidade como um conceito objectivo, a primeira determina que a probabilidade é o grau de confiança individual que determinado evento possa suceder (Gelman et al., 2004). A abordagem tradicional considera um parâmetro como uma grandeza fixa ainda que desconhecida enquanto que na perspectiva Bayesiana considera-se que o parâmetro pode ter uma distribuição de valores possíveis. Nesta visão, a função densidade de probabilidade $p(x)$ reflecte o grau de confiança de onde o valor real (desconhecido) do parâmetro possa estar. Se $p(x)$ é estreita em torno de um determinado valor então a confiança relativamente à sua localização é elevada. Por outro lado, uma função $p(x)$ alargada traduz uma incerteza maior quanto à sua real localização.

As técnicas Bayesianas permitem actualizar variáveis aleatórias quando nova informação se torna disponível utilizando um processo matemático adequado de forma a reduzir as incertezas. Este processo pode ser dividido nos passos seguintes (Ditlevsen e Madsen, 1996):

1. Estabelecer distribuições de probabilidades para todas as variáveis consistentes com o conhecimento existente.

2. Calcular a distribuição posterior das variáveis de interesse condicional à nova informação observada.

3. Avaliar o ajuste do modelo à informação existente analisando se as conclusões são razoáveis e quão sensíveis são os resultados ao assumido no passo 1.

A distribuição posterior é um compromisso entre a informação inicial e a nova informação. Os métodos Bayesianos fornecem ferramentas para incorporar dados e informação externa no processo de análise de dados. Numa abordagem Bayesiana este processo começa com uma dada distribuição de probabilidades. Os seus parâmetros podem ser avaliados ou estimados baseados em resultados experimentais anteriores, experiência e julgamento profissional. Esta é a distribuição inicial e representa a incerteza relativamente aos parâmetros. Quando nova informação é tornada disponível esta pode ser utilizada para actualizar esta distribuição inicial numa distribuição posterior através do teorema de Bayes. A Figura 1 resume este processo.

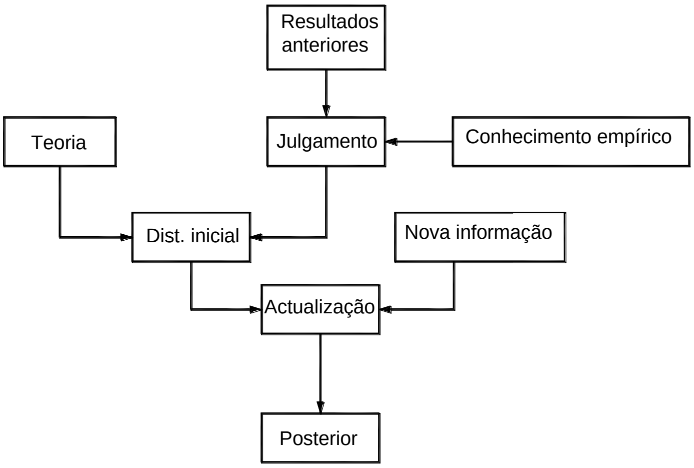

Figura 1 – Esquema do processo de actualização Bayesiano (adaptado de Faber (2005)).

2.2. Teorema de Bayes

Se a distribuição inicial de um parâmetro θ, com n possíveis valores (θ_1, … θ_k) é contínua e nova informação x está disponível, então o teorema de Bayes é dado por:

$$p(\theta \mid x) = \frac{p(\theta)p(x \mid \theta)}{\int p(\theta)p(x \mid \theta)d\theta} \tag{1}$$

onde $p(\theta)$ é a distribuição inicial dos valores possíveis de θ e que baliza as ideias iniciais acerca dos possíveis valores para o parâmetro, $p(x|\theta)$ é a probabilidade condicional (ou verosimilhança) da nova informação dado θ e $p(\theta|x)$ é a distribuição posterior de θ dada a nova informação x.

As distribuições iniciais e posteriores de θ podem ser representadas pela função de densidade de probabilidade. A distribuição conjunta de probabilidade da informação nova dada a informação inicial do parâmetro é dada por $p(x|\theta)$ que é designada por verosimilhança e é definida por:

$$p(x \mid \theta) = L(\theta) = \prod_i p(x_i \mid \theta) \tag{2}$$

O teorema de Bayes consiste em multiplicar a distribuição inicial pela verosimilhança e normalizar o resultado para obter a distribuição posterior que é a distribuição condicional do parâmetro desconhecido face à nova informação que foi coligida. A posterior sumaria a informação total depois de ser considerada a nova informação fornecendo as bases para novas inferências acerca de θ.

2.3. Inferência Bayesiana

O processo de inferência Bayesiana envolve passar da distribuição inicial $p(\theta)$ para a distribuição posterior $p(\theta|x)$ utilizando a função verosimilhança da nova informação. Como a posterior integra mais informação do que a inicial será menos variável.

Na abordagem Bayesiana assume-se que os parâmetros de interesse seguem determinadas funções de densidade de probabilidade com um ou mais parâmetros da distribuição desconhecidos. Considera-se que estes parâmetros seguem também determinadas distribuições com hiperparâmetros (parâmetros das distribuições dos parâmetros das distribuições) conhecidos. Os hiperparâmetros são então actualizados dada a nova informação e são utilizados para inferir os parâmetros das distribuições. A consideração de momentos variáveis em vez de fixos pretende introduzir vários níveis de incerteza no modelo.

Neste trabalho foi utilizado um modelo multiparâmetro que envolve a consideração da média e do desvio padrão do parâmetro de estudo (módulo de deformabilidade - E) como valores desconhecidos. Nesta abordagem Bayesiana considerou-se que quer a média (μ) quer a variância (σ^2) de E são variáveis aleatórias. Foi considerada uma distribuição normal para a função verosimilhança, o que permite obter resultados perfeitamente aceitáveis (Ditlevsen e Madsen, 1996) e tem a conveniência computacional de permitir utilizar distribuições iniciais conjugadas o que significa que a distribuição posterior tem a mesma forma paramétrica da distribuição inicial. Assim, a distribuição conjugada inicial tem a seguinte forma:

$$p\left(\mu \mid \sigma^2\right) \propto \left(\frac{n_0}{\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{n_0}{2\sigma_0}(\mu-\mu_0)^2\right] \times \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{\nu_0}{2}+1} \exp\left[-\frac{S_0}{2\sigma^2}\right] \tag{3}$$

onde n_0 – número inicial de valores de E retirados das soluções analíticas; S_0 – soma quadrática das diferenças entre os valores iniciais e a sua média; μ_0 e σ_0 – média e desvio padrão inicial. Esta expressão significa que a distribuição inicial é o produto da densidade de uma distribuição gamma invertida com argumentos σ^2 e v_0 graus de liberdade e a densidade de uma distribuição normal com argumento μ, onde a variância é proporcional a σ^2. Trata-se da densidade da designada distribuição normal-gamma. Assim, a distribuição inicial para μ condicional a σ^2 é uma normal com média μ_0 e variância σ^2/n_0:

$$\mu \mid \sigma^2 \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n_0}\right) \tag{4}$$

A distribuição inicial para a precisão $(1/\sigma^2)$ é uma distribuição gamma com hiperparâmetros $v_0/2$ e $S_0/2$:

$$\frac{1}{\sigma^2} \sim gamma\left(\frac{\upsilon_0}{2}, \frac{S_0}{2}\right) \tag{5}$$

A aparição de σ^2 na distribuição condicional de $\mu|\sigma^2$ significa que μ e σ^2 são interdependentes. A distribuição posterior condicional de μ dado σ^2 é proporcional a $p(\mu,\sigma)$ com σ^2 mantido constante. Pode ser demonstrado que:

$$\mu \mid \sigma^2, x \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n_1}\right) \tag{6}$$

onde,

$$\mu_1 = \frac{n_0}{n_0 + n} \cdot \mu_0 + \frac{n}{n_0 + n} \cdot \bar{x} \qquad (7)$$

$$n_1 = n_0 + n \qquad (8)$$

onde μ_1 – media posterior; n – número de resultados de ensaios; $\bar{x}$ - media dos resultados dos ensaios. Os parâmetros da distribuição posterior combinam a informação inicial e a informação contida nos dados novos. Por exemplo, μ_1 é uma média ponderada da informação inicial e da nova informação, com pesos determinados pela precisão relativa de cada parte. A densidade posterior marginal de $1/\sigma^2$ é uma gamma:

$$\frac{1}{\sigma^2} \mid x \sim gamma\left(\frac{\upsilon_1}{2}, \frac{S_1}{2}\right) \qquad (9)$$

onde,

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 + n \qquad (10)$$

$$S_1 = S_0 + (n-1) \cdot s^2 + \frac{n_0 \cdot n}{n_0 + n} \cdot (x - \mu_0)^2 \qquad (11)$$

A obtenção da distribuição posterior dos parâmetros é o objectivo fundamental da análise Bayesiana. Para obter a distribuição posterior completa dos parâmetros é, normalmente, necessário recorrer a métodos de simulação. Existem vários algoritmos para simular as distribuições. Um dos mais populares é o método das correntes de Markov normalmente designada por “Markov Chain Monte Carlo” (MCMC). Este método baseia-se na determinação sequencial de valores com a distribuição destes valores a depender unicamente no último valor determinado (Brooks, 1998). Na teoria da probabilidade uma corrente de Markov é uma sequência de variáveis aleatórias $\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_n$ as quais, para qualquer instante t, a distribuição de θ_t depende unicamente no valor mais recente θ_{t-1}.

3. APLICAÇÃO DA METODOLOGIA BAYESIANA PARA A ACTUALIZAÇÃO DE E

Neste trabalho, a abordagem Bayesiana desenvolvida é aplicada a dados coligidos numa no âmbito do projecto hidroeléctrico da Venda Nova II para a actualização do valor de E. Para estabelecer uma distribuição inicial para o parâmetro utilizou-se informação geomecânica obtida em várias secções e aplicados sistemas de classificação empírica de maciços rochosos. Estes índices foram utilizados para calcular o valor E com recurso a expressões analíticas encontradas na literatura. Desta forma, foram obtidos 76 valores de E que serviram de base para o estabelecimento da distribuição inicial do parâmetro.

A informação utilizada para a actualização da distribuição inicial de E consistiu nos resultados de ensaios LFJ realizado pelo LNEC (LNEC, 1983, 2003) que considerando os diversos ciclos de carga/descarga (excluindo os valores obtidos no primeiro ciclo de carga) permitiu obter um total de 160 valores de E. Obviamente, a informação inicial e a referente aos ensaios foi obtida em zonas próximas de forma a ser comparável.

Este parâmetro geomecânico foi considerado como uma variável aleatória cuja distribuição original da população não é conhecida. Normalmente, em abordagens probabilísticas, considera-se que os parâmetros geomecânicos seguem distribuições normais ou lognormais. Neste estudo, ambas as situações foram testadas no sentido de avaliar o impacto das considerações iniciais nos resultados obtidos. Tendo em consideração toda a informação descrita e aplicando a metodologia desenvolvida obtiveram-se as distribuições iniciais e as posteriores actualizadas com a nova informação que se apresentam no Quadro 1.

Quadro 1 - Distribuições iniciais e posteriores para os parâmetros da distribuição de E.

Distribuição	Normal	Lognormal
Inicial	$\mu \mid \sigma^2, X \sim N\left(38{,}5, \frac{\sigma^2}{76}\right)$	$\mu \mid \sigma^2, X \sim N\left(3{,}489, \frac{\sigma^2}{76}\right)$
	$\frac{1}{\sigma^2} \sim gamma\left(38{,}5, \frac{1}{11573{,}5}\right)$	$\frac{1}{\sigma^2} \sim gamma\left(38{,}5, \frac{1}{16{,}586}\right)$
Posterior	$\mu \mid \sigma^2, X \sim N\left(37{,}4, \frac{\sigma^2}{236}\right)$	$\mu \mid \sigma^2, X \sim N\left(3{,}560, \frac{\sigma^2}{236}\right)$
	$\frac{1}{\sigma^2} \sim gamma\left(118{,}5, \frac{1}{14597{,}6}\right)$	$\frac{1}{\sigma^2} \sim gamma\left(118{,}5, \frac{1}{19{,}194}\right)$

Como a média é condicional à variância as estimativas da distribuição inicial e posterior para a média e variância foram obtidas por simulação através do método MCMC já descrito. Os resultados principais da simulação são apresentados nos Quadros 2 e 3.

Quadro 2 - Estimativas iniciais e posteriores para a média de E (distribuição normal) (GPa).

Parâmetro	Distribuição inicial	Distribuição posterior
μ	38,5	37,4
$\sigma(\mu)$	2,02	0,73
σ	17,5	11,1
$\sigma(\sigma)$	1,45	0,52
IC 95% para a média	35,2-41,8	36,2-38,6
$\mu_{população}$	38,4	37,5
$\sigma_{população}$	19,6	11,9
IC 95% para a média da população	6,1-70,7	17,9-57,1

IC – intervalo de confiança

Quadro 3 - Estimativas iniciais e posteriores para a média de E (distribuição lognormal) (GPa).

Parâmetro	Distribuição inicial	Distribuição posterior
μ	32,8	35,2
$\sigma(\mu)$	2,47	0,915
σ	1,943	1,498
$\sigma(\sigma)$	0,105	0,028
IC 95% para a média	28,9-37,1	33,6-36,7
$\mu_{população}$	42,8	38,3
$\sigma_{população}$	36,1	17,3
IC 95% para a média da população	9,8-109,2	17,2-71,0

O valor actualizado da média da média (μ) sofreu apenas uma pequena variação da distribuição inicial para a actualizada. De facto, esta variação foi de apenas 3% e 7% para o caso da distribuição normal e lognormal, respectivamente. A média inicial era já próxima dos valores medidos através do ensaio LFJ. O aspecto mais importante é, no entanto, a substancial redução da incerteza a todos os níveis. Para o caso da distribuição normal o desvio padrão da média ($\sigma(\mu)$) foi reduzido de 2,02 GPa para 0,73 GPa, isto é, apenas 36% do valor inicial. A média do desvio padrão (σ) diminuiu 37% de 17,5 GPa para 11,1 GPa. Finalmente, o desvio padrão do desvio padrão ($\sigma(\sigma)$) foi também substancialmente reduzido de 1,45 GPa para 0,51 GPa.

A distribuição lognormal segue a mesma tendência de redução da incerteza. A redução relativa de $\sigma(\mu)$ foi bastante semelhante ao caso anterior. Em relação aos parâmetros restantes, σ e $\sigma(\sigma)$, este foram reduzidos em 23% e 73%, respectivamente. Para ilustrar este facto, a Figura 2 apresenta a função densidade de probabilidade inicial e actualizada para a média de E considerando o valor médio do seu desvio padrão. A redução da incerteza da distribuição inicial para a posterior pode ser claramente observada.

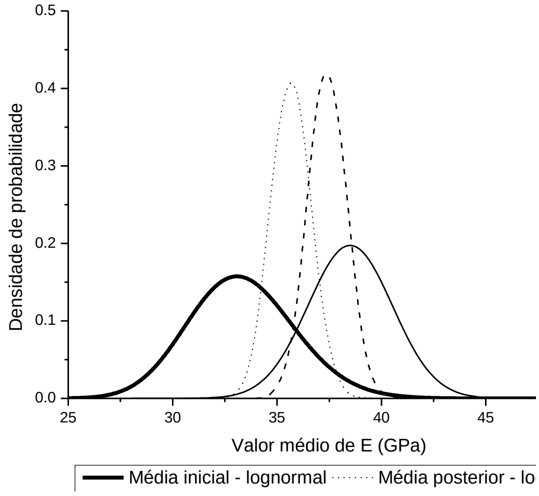

Figura 2 – Distribuições iniciais e actualizadas para a média de E.

Utilizando a simulação foi possível inferir valores médios e intervalos de confiança a 95% para a população. Relativamente ao valor médio, o processo de actualização apenas alterou significativamente a média relativa à distribuição lognormal que foi reduzida cerca de 11%. Também para os valores referentes à população o processo de actualização Bayesiano permitiu uma redução significativa nas medidas de dispersão o que significa menor incerteza. Os valores do desvio padrão foram reduzidos em 39% e 52% para a distribuição normal e lognormal, respectivamente com impacto directo no estreitamento substancial do intervalo de confiança a 95% para a média. Na Figura 3 apresenta-se as distribuições inicial e posterior de E considerando os valores médios da média e do desvio padrão. A incerteza quanto aos parâmetros foi claramente reduzida.

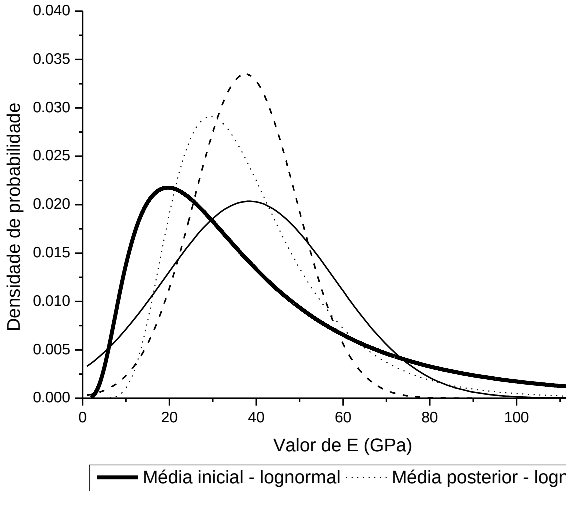

Figura 3 – Distribuições iniciais e actualizadas para o valor de E (inferido para a população).

4. CONCLUSÕES

As metodologias Bayesianas possuem a flexibilidade inerente de permitir incorporar múltiplos níveis de incerteza e a possibilidade de combinar informação de diferentes origens. Por outras palavras, as maiores vantagens da abordagem Bayesiana são a de poder combinar diferentes tipos de informação e a forma racional de lidar com incertezas utilizando ferramentas probabilísticas. Estas metodologias permitem actualizar a informação de variáveis aleatórias à medida que nova informação é criada.

Acredita-se que as características da análise de dados Bayesiana é bastante aplicável em problemas de geotecnia onde a incerteza está presente a diferentes níveis. Neste campo, a informação relativa às formações interessadas aumenta à medida que o projecto avança e pode ser utilizada para actualizar os modelos geotécnicos.

Neste trabalho foi desenvolvida uma abordagem baseada nas probabilidades Bayesianas para a actualização do módulo de deformabilidade numa obra subterrânea. A informação utilizada resultou da realização de um ensaio LFJ e da aplicação, a informação geomecânica obtida no local, de expressões empíricas baseadas nos sistemas de classificação de maciços rochosos. A metodologia mostrou ser consistente e matematicamente válida resultando principalmente numa redução substancial da incerteza, traduzida pelo desvio padrão dos diversos parâmetros, a vários níveis.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de expressar o seu agradecimento à EDP Produção EM por ter disponibilizado a informação necessária para o desenvolvimento deste trabalho. Este trabalho foi financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT), Projecto POCI/ECM/57495/2004, intitulado “Geotechnical Risk in Tunnels for High Speed Trains”.

REFERÊNCIAS

Brooks, S. 1998. Markov chain Monte Carlo method and its application. The Statistician, 47, Part 1, pp. 69-100.

Ditlevsen, O. & Madsen, H. 1996. *Structural reliability methods. John Wiley & Sons.* 372p.

Einstein, H. H. 2006. “Use of decision aids for tunnelling”. Geotechnical risk in rock tunnels. Ed. Campos e Matos, Ribeiro e Sousa, Klerberger and Lopes Pinto. Taylor & Francis group, London, pp. 63-74.

Faber, M. 2005. *Risk and safety in civil, surveying and environmental engineering*. Lecture notes. 394 p.

Gelman, A.; Carlin, J.; Stern, H; Rubin, D. 2004. *Bayesian data analysis*. Chapman & Hall/CRC. 668p.

LNEC. 1983. “Colaboração do LNEC nos estudos geológicos/geotécnicos para o circuito hidráulico da Venda Nova II”. Relatório interno do LNEC 47/1/7084, Lisboa, Portugal.

LNEC. 2003. “Complexo da Venda Nova II. Determinação do estado de tensão”. Relatório interno do LNEC 371/03, Lisboa, Portugal.

Miranda, T. (2007). *Geomechanical parameters evaluation in underground structures. Artificial intelligence, Bayesian probabilities and inverse methods*. Tese de Doutoramento. UM, Guimarães, 291p.